Cheat Sheet – Quantum Computing

1.) Qubits

Ein Zwei-Zustands-Quantensystem wird als Qubit bezeichnet (Bra-Ket-Notation).

Basiszustände:	$\vert 0\rangle$ und $\vert 1\rangle$ (analog zu „an“/„aus“; 0/1 „lebendig“/„tot“)
Allgemeiner Zustand:	$\vert\Psi\rangle = \alpha\vert 0\rangle + \beta\vert 1\rangle$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (komplexe Superposition/Überlagerung aus Basis-Zuständen; auch „Wellenfunktion“ genannt)
Messung:	Die Ergebnisse einer Messung werden vom Zufall bestimmt. Bei Messung kollabiert die Wellenfunktion.
Born-Interpretation:	Bei der Messung in $\vert 0\rangle$-$\vert 1\rangle$-Basis geben $\vert\alpha\vert^2$ und $\vert\beta\vert^2$ die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten an, $\vert 0\rangle$ oder $\vert 1\rangle$ zu erhalten.
Wahrscheinlichkeiten:	Es gilt immer: $\vert\alpha\vert^2 + \vert\beta\vert^2 = 1$.

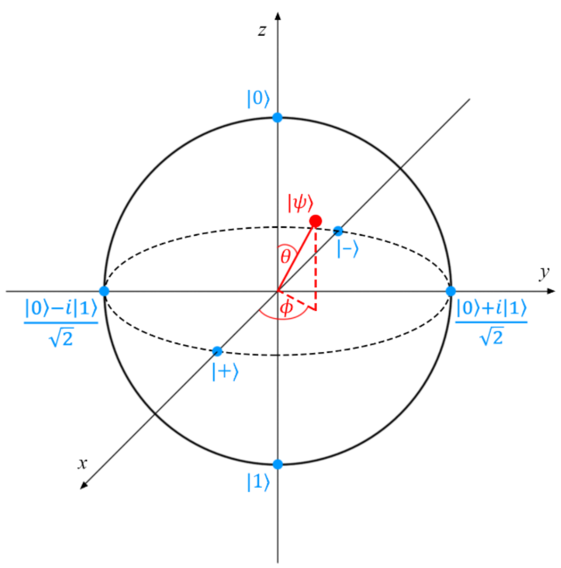
Qubits können mit folgender Koordinatenschreibweise als Spalten-Vektor dargestellt werden:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt z.B.: $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ usw.

2.) Bloch-Kugel – Bloch Sphere



Jeder Zustand eines Qubits kann als Punkt auf der Bloch-Kugel dargestellt werden.

<u>Besondere Zustände in der $|0\rangle$-$|1\rangle$-Basis:</u>

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$$

$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

3.) Quanten-Gatter – Quantum Gates

Quanten-Gatter:

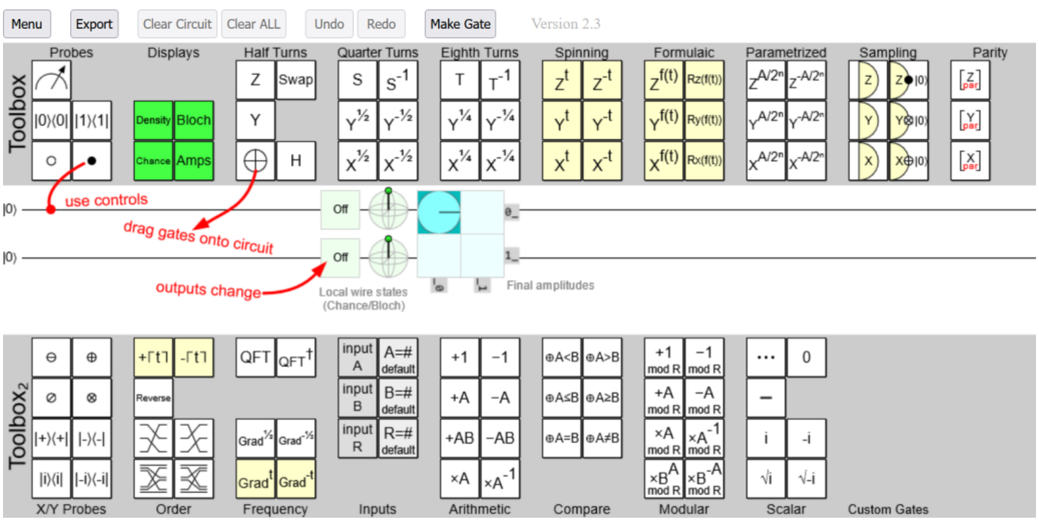
- sind lineare Abbildungen, bei denen sich die Wahrscheinlichkeiten weiterhin auf 1 summieren.
- müssen reversibel sein.
- stellen Drehungen der Qubit-Zustände auf der Bloch-Kugel dar.
- können durch Matrizen einfach und elegant beschrieben werden.

Wichtige Ein-Qubit-Quanten-Gatter:

Name	Darstellung	Wirkung	Rotation auf Bloch-Kugel	Matrix	Beispiel
I Identität	$\boxed{I}$	$I\|0\rangle = \|0\rangle$ $I\|1\rangle = \|1\rangle$ $I\|+\rangle = \|+\rangle$ $I\|-\rangle = \|-\rangle$	Keine Rotation	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
X-, NOT-, Pauli-X- bzw. bit flip-Gate	$\boxed{X}$ $\oplus$	$X\|0\rangle = \|1\rangle$ $X\|1\rangle = \|0\rangle$ $X\|+\rangle = \|+\rangle$ $X\|-\rangle = -\|-\rangle$	Rotation um 180° um die x-Achse	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$
Y- bzw. Pauli-Y-Gate	$\boxed{Y}$	$Y\|0\rangle = i\|1\rangle$ $Y\|1\rangle = -i\|0\rangle$ $Y\|+\rangle = -i\|-\rangle$ $Y\|-\rangle = i\|+\rangle$	Rotation um 180° um die y-Achse	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix}$
Z- bzw. Pauli-Z-Gate	$\boxed{Z}$	$Z\|0\rangle = \|0\rangle$ $Z\|1\rangle = \|1\rangle$ $Z\|+\rangle = \|-\rangle$ $Z\|-\rangle = \|+\rangle$	Rotation um 180° um die z-Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$
H- bzw. Hadamard- Gate	$\boxed{H}$	$H\|0\rangle = \|+\rangle$ $H\|1\rangle = \|-\rangle$ $H\|+\rangle = \|0\rangle$ $H\|-\rangle = \|1\rangle$	z.B. erst Rotation um 90° um die y-, anschließend 180° um die x-Achse	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}$
u.v.m.					

4.) Simulation von Quanten-Schaltkreisen

Quirk: https://algassert.com/quirk



5.) Mehrere Qubits

Mehrere Qubits (hier A und B) können auch mithilfe von Vektoren dargestellt werden.

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_A|\Psi\rangle_B &= |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_B = (\alpha_A|0\rangle_A + \beta_A|1\rangle_A)(\alpha_B|0\rangle_B + \beta_B|1\rangle_B)\\ &= \alpha_A\alpha_B|0\rangle_A|0\rangle_B + \alpha_A\beta_B|0\rangle_A|1\rangle_B + \beta_A\alpha_B|1\rangle_A|0\rangle_B + \beta_A\beta_B|1\rangle_A|1\rangle_B\\ &= c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle\\ &= \begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} \text{ mit } |c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1\end{aligned}$$

Speziell gilt:

$$|00\rangle = |0\rangle_A|0\rangle_B = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

> Hinweis:
> Die hier ausgeführte $\otimes$-Multiplikation nennt man **Kronecker-Produkt**

$$|10\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\ 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

6.) Produktzustände und Verschränkung

Wenn sich z.B. ein Zustand zweier Qubits $|\Psi\rangle$ in ein „Produkt“ der Zustände der einzelnen Qubits separieren lässt, so handelt es sich um einen **Produktzustand** bzw. der Zustand ist **separabel**.

Beispiel: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes |0\rangle_B$

Zustände, die sich nicht separieren lassen nennt man **verschränkt**.

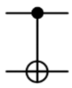
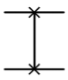
Beispiele: Bell-Zustände

$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ $\quad$ $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ $\quad$ $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

7.) Quanten-Gatter für mehrere Qubits

Wichtige Quantengatter für zwei Qubits:

Name	Darstellung	Wirkung	Beschreibung	Matrix	Beispiel
C-X-, Control-NOT- bzw. CNOT-Gate		$CNOT\|00\rangle = \|00\rangle$ $CNOT\|01\rangle = \|01\rangle$ $CNOT\|10\rangle = \|11\rangle$ $CNOT\|11\rangle = \|10\rangle$	bit flip beim zweiten Qubit, wenn erstes Qubit 1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}$
SWAP-Gate		$SWAP\|00\rangle = \|00\rangle$ $SWAP\|01\rangle = \|10\rangle$ $SWAP\|10\rangle = \|01\rangle$ $SWAP\|11\rangle = \|11\rangle$	Qubits werden getauscht	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix}$
u.v.m.					